

**Казанский ордена Ленина и Трудового Красного Знамени
государственный университет**

На правах рукописи

Бутенко Юрий Иванович

УДК 539.3

**Вариационно-асимптотические методы построения неклассических
моделей расчета однослойных и многослойных стержней и пластин**

**Специальность –01.02.04- механика деформируемого
твердого тела**

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Казань-2003г.

Работа выполнена на кафедре “Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности” Казанской государственной архитектурно-строительной академии.

Научный консультант: Заслуженный деятель науки и техники РФ и РТ, академик АН РТ, доктор физико-математических наук, профессор **И.Г.Терегулов**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Н.Г.Гурьянов**
доктор физико-математических наук, профессор **Л.Ю.Коссович**
доктор физико-математических наук, профессор **Ю.А.Устинов**

Ведущая организация – Казанский технический университет им.А.Н.Туполева (КАИ)

Защита состоится ____ 2003г. в ауд. физ.2 на заседании Диссертационного совета Д 212.081.11 по защите диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по механике при Казанском государственном университете им.В.И.Ульянова-Ленина (420008, г.Казань, ул.Кремлевская, 18).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке КГУ им. Н.И.Лобачевского.

Автореферат разослан _____ 2003г.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат физ.-мат.наук, доцент

А.А.Саченков

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. В машиностроении, строительстве и современной технике широко распространены тонкостенные конструкции, важными элементами которых являются анизотропные полосы, пластины и оболочки. Одной из основных задач при проектировании таких конструкций является экономия композиционных материалов, которая требует разработки более точных и эффективных методов расчета этих элементов. За два века развития теории стержней, пластин и оболочек накопилась обширная литература, в которой содержится много фактического материала по построению различных прикладных теорий и решению отдельных задач. Этим теориям посвящены монографии и работы Л.А.Агаловяна, А.Я.Александрова, С.А.Амбарцумяна, Н.А.Алфутова, В.В.Болотина, В.В.Васильева, И.Н.Векуа, В.З.Власова, И.И.Воровича, К.З. Галимова, А.Л.Гольденвейзера, А.Г.Горшкова, Э.И.Григolyка, Я.М.Григоренко, А.Н.Гузя, В.А.Заруцкого, М.А.Ильгамова, Н.А.Кильчевского, В.Койтера, М.С.Корнишина, В.И.Королева, Л.Ю.Коссовича, С.Г.Лехницкого, А.И.Лурье, Х.М.Муштари, П.Нагди, Ю.В.Немировского, Ю.Н.Новичкова, В.В.Новожилова, И.Ф.Образцова, П.М.Огибалова, В.Н.Паймушина, Б.Л.Пелеха, В.В.Пикуля, Э.Рейсснера, А.В.Саченкова, В.С.Саркисяна, И.Г.Терегулова, С.П.Тимошенко, П.Е.Товстика, Ю.А.Устинова, В.Флюге, Т.Т.Хачатряна, Л.П.Хорошуна, К.Ф.Черныха и многих других.

Эти работы содержат многочисленные подходы к обоснованию теорий (моделей) расчета однослойных и многослойных стержней, пластин и оболочек с различными физико-механическими свойствами. В настоящее время различные подходы можно разделить на следующие большие группы:

1. метод гипотез;
2. аналитические методы интегрирования уравнений теории упругости;
3. асимптотические методы интегрирования уравнений теории упругости.

Каждая из этих групп обладает своими достоинствами и недостатками. Желание использовать точные методы решения всегда ведет к значительному усложнению систем дифференциальных уравнений, содержащих в качестве аргумента малый параметр, который оказывает большое влияние на решение. Поэтому усложнения в постановке задачи с целью выяснения определенных взаимосвязей в балках, пластинах и оболочках должны опираться на асимптотические методы исследования полученных уравнений с целью значительного упрощения задачи в математическом плане. Широкое распространение асимптотические методы исследования в задачах расчета балок, пластин и оболочек получили во второй половине XX века.

Данная диссертационная работа объединяет все три подхода к построению различных моделей расчета балок, пластин и оболочек и представляет дальнейшее развитие аналитических методов интегрирования уравнений теории упругости Х.М.Муштари и И.Г.Терегулова для однослойных и многослойных полос, пластин и оболочек с использованием асимптотических методов исследования полученных уравнений. Предложенное аналитическое направление получения неклассических моделей расчета стержней и пластин обладает прозрачностью асимптотических методов исследования и простотой метода гипотез и позволяет получить модель расчета с необходимой точностью.

Получены решения основного напряженного состояния и погранслоев для однослойных и многослойных балок и пластин, что позволяет более точно формулировать краевые условия и более адекватно описывать НДС в краевой зоне многослойных конструкций.

Рассмотрены случаи, когда упрощается интегрирование системы дифференциальных уравнений, описывающих напряженное состояние многослойной конструкции по модели В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова.

Цели и задачи исследований

При построении неклассических моделей расчета однослойных и многослойных стержней, пластин и оболочек из ортотропных материалов необходимо учитывать два противоречивых требования. С одной стороны, полученные уравнения должны быть достаточно общими с учетом всех факторов НДС конструкции, а с другой - они должны быть наиболее просты и удобны в использовании, должны учитывать необходимую точность расчетов, которая не должна превосходить точности используемой модели.

В связи с этим целью работы явилось:

- выяснение вопросов асимптотического анализа бесконечной системы дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, полученных на основе представления перемещений в бесконечный степенной ряд по поперечной координате, для однослойных и многослойных балок и пластин;
- нахождение основного напряженного состояния в однослойных и многослойных конструкциях и выяснение основных переменных, которые определяются из дифференциальных уравнений и остальных переменных, определяющихся по простым дифференциальным соотношениям;
- изучение пограничных слоев, характера затухания напряженно-деформированного состояния пограничного слоя и его взаимодействие с основным напряженно-деформированным состоянием;
- установление условий существования затухающих решений для однослойных и многослойных конструкций из ортотропного материала;

- формирование краевых условий определения основного напряженного состояния с учетом погранслоев в однослойных и многослойных конструкциях;
- получение несложных для расчетных приложений рекуррентных формул для вычисления различных приближений основного напряженно-деформированного состояния трехслойной плоской задачи с жестким или мягким средним слоем;
- получение возможности упрощения при интегрировании уравнений изгиба многослойных конструкций, полученных на основе модели В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова;
- постановка задачи по получению точного решения в задаче определения погранслоев при расчете многослойных пластин.

Научную новизну составляют следующие результаты :

1. В работе предложен новый аналитический подход к получению краевых задач расчета однослойных и многослойных балок, пластин и оболочек с учетом поперечного сдвига и обжатия с необходимой точностью. В работе принята точность ε^2 ($\varepsilon=h/a$, h – полутолщина пластины, a – характерный размер в плане). Асимптотический анализ полученных уравнений позволил свести задачу по определению ОНС к известным классическим уравнениям.
2. Построены различные приближения по определению основного НДС для однослойных и многослойных плоских задач теории упругости из ортотропного материала. Получено ОНС для однослойной пластины.
3. Получены точные и приближенные решения погранслоев (плоская и антиплоская деформации) для однослойных и многослойных полос и пластин. Получены соответствующие условия существования затухающих решений, в том числе и для кинематических краевых условий.
4. Показана процедура выполнения краевых условий, полученных вариационным путем, для определения ОНС без использования условий существования затухающих решений для однослойных и многослойных конструкций. Для однослойной пластины разработан асимптотический метод выполнения трех краевых условий при использовании классического уравнения изгиба пластин.
5. Доказано, что модель сведения трех статических краевых условий пластины к двум есть следствие существования антиплоского погранслоя. Модель Тимошенко-Рейсснера для пластины улавливает этот погранслой и не описывает второй погранслой- плоскую деформацию, для определения которого должна выбираться более сложная модель расчета.

6. Для однослойной пластины показано, что учет погранслоя плоская деформация при кинематических краевых условиях позволяет определить в ОНС слагаемые точности ε^1 , а для остальных краевых условий – с точностью ε^2 .
7. На примере асимптотического анализа трехслойной плоской задачи теории упругости получены уравнения расчета ОНС трехслойной полосы с жестким или мягким заполнителями. Для пластин с мягким заполнителем, рассчитываемых по модели В.В.Болотина-Н.Н.Новичкова, предложена процедура расчета, которая позволила вдвое сократить число одновременно определяемых искомых функций.

Достоверность основных научных результатов обеспечивается математической корректностью постановки задачи и методов их решения и подтверждается сравнением полученных автором теоретических результатов и решенных на их основе практических задач с известными в научной литературе.

Практическую ценность составляют впервые разработанные в диссертации вариационно-асимптотические методы построения неклассических моделей расчета однослойных и многослойных полос и пластин, которые дают возможность объединить несколько подходов к расчету пластин и оболочек и позволяют построить модели расчета с заданной точностью.

Результаты работы могут быть использованы в различных КБ, занимающихся расчетом тонкостенных многослойных и однослойных конструкций из ортотропного материала.

Основная часть работы выполнялась в рамках программы Министерства образования РФ “Прочность”, “Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций”, проектов №93-013-16747 и №99-01-00410 Российского фонда фундаментальных исследований, проекта по реализации Программы Республики Татарстан по развитию науки по приоритетным направлениям, в соответствии с планом хоздоговорных НИР кафедры “Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности” Казанской государственной архитектурно-строительной академии с НПО “Композит”. По части работы на средства гранта АН РТ выпущена монография “Вариационно-асимптотические методы построения неклассических методов расчета стержней и пластин” Казань.2001.320 с.

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

- Асимптотический анализ аналитического решения расчета однослойных и многослойных полос и пластин, полученного по методике Х.М.Муштари – И.Г.Терегулова.
- Определение основного НДС однослойных стержней и пластин и многослойных полос с жестким и мягким заполнителем.

- Точное и приближенное определение решений типа погранслоев для однослойных и многослойных стержней и пластин.
- Уточнение основного НДС за счет влияния погранслоев в формировании краевых условий задачи.
- Упрощение интегрирования системы уравнений, описывающей ОНС многослойной пластины с мягким заполнителем и построенной по модели В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова.

Апробация работы. Основные результаты докладывались и обсуждались:

- на XYP Международной конференции по теории оболочек и пластин (Казань, 1995г.),
- на Международной конференции, посвященной памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. Саченкова А.В. (Казань, 1998г.),
- на Международной конференции, посвященной 100-летию профессора Х.М.Муштари, 90-летию профессора К.З.Галимова и 80-летию профессора М.С.Корнишина (Казань, 2000г.),
- на YIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001г.),
- на XX Международной конференции по теории оболочек и пластин (Нижний Новгород, 2002г.),
- на итоговых научных конференциях Казанской государственной архитектурно-строительной академии,
- на XX Всероссийской межвузовской научно-технической конференции Михайловского военного артиллерийского университета (филиал, г.Казань, 2003г.).

В целом диссертация докладывалась и получила одобрение на открытом заседании научно-технического совета Казанской государственной архитектурно-строительной академии и на расширенном семинаре кафедры теоретической механики Казанского государственного университета им. В.И.Ульянова-Ленина.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 17-и работах и одной монографии, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 402 страницах, включает введение, три главы, заключение, библиографический список, содержащий 201 наименований цитируемой литературы, содержит 2 таблицы и 11 рисунков.

Автор считает своим долгом с благодарностью отметить большую роль научного консультанта заслуженного деятеля науки и техники РТ и РФ,

академика АН РТ, доктора физико-математических наук, профессора Ильтузара Гизатовича Терегулова за формирование моего научного мировоззрения.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, дается краткий обзор работ, посвященных затронутым в диссертации вопросам. В обзоре наиболее полно отражены исследования, в которых используются точные аналитические методы решения и асимптотические методы интегрирования уравнений теории упругости. Аналитические методы решения обсуждались в работах А.И.Лурье, В.З.Власова, Н.А.Кильчевского, И.Н.Векуа, Х.М.Муштари, И.Г.Терегулова, А.В.Саченкова, В.В.Понятовского, В.К.Прокопова, В.В.Власова, И.Ю.Хома и других. Асимптотические методы в теории оболочек и пластин получили интенсивно развитие благодаря работам А.Л.Гольденвейзера, И.И.Воровича, К.Фридрикса, А.Грина, П.Е.Товстика, О.К.Аксентян, М.И.Гусейн-Заде, А.В.Колос, Л.А.Агаловяна, Н.Н.Рогачевой, Ю.А.Устинова, А.С.Срубщика, Г.Н.Чернышева, Ю.Д.Каплунова, А.М.Хачатряна, Р.С.Геворкяна, Л.Ю.Коссовича и многих других. Значительному продвижению асимптотических методов интегрирования уравнений теории упругости способствовала монография Л.А.Агаловяна. Изучению взаимодействия пластин и оболочек с различными физическими полями с использованием асимптотического метода посвящены исследования С.А.Амбарцумяна, Г.Е.Багдасаряна, М.В.Белубекяна, Е.В.Галактионова, И.Е.Зино, А.С.Космодамианского, В.Н.Ложкина, А.Л.Радовинского, Н.Н.Рогачевой, С.О.Саркисяна, В.С.Саркисяна, Э.А.Троппа, Ю.А.Устинова и других.

Во введении в общих чертах изложено содержание работы.

В первой главе рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольной области из ортотропного материала.

В первом параграфе рассматривается полоса длиной a , высотой $2h$, единичной толщины. Предполагается, что главные направления ортотропии материала совпадают с направлениями координатных линий. Требуется найти решение плоской задачи теории упругости в области $\Omega\{(x, y) : x \in [0, a], |y| \leq h, 2h \ll a\}$, когда на продольных сторонах прямоугольника $y = \pm h$ заданы значения напряжений

$$\tau_{xy} = \pm X^{\pm}(x), \quad \sigma_y = \pm Y^{\pm}. \quad (1)$$

В дальнейшем используется безразмерная система координат ξ, ζ и безразмерные перемещения u, v :

$$\xi = x/a, \quad \zeta = y/h, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad -1 \leq \zeta \leq 1, \quad \varepsilon = h/a, \quad U = ua, \quad V = va. \quad (2)$$

Перемещения представим в виде степенного ряда по поперечной координате $y = h\zeta$

$$u(\xi, \zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i u_i(\xi, \varepsilon) \zeta^i, \quad v(\xi, \zeta, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i v_i(\xi, \varepsilon) \zeta^i, \quad (3)$$

где N – соответствует порядку аппроксимации. Здесь и далее нижний индекс в компонентах перемещений, напряжений и деформаций соответствует показателю степени поперечной координаты, при которой они имеют место.

Для получения уравнений равновесия стержня используем вариационный принцип возможных перемещений

$$\iint_{\Omega} \sigma^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} d\Omega = \iint_{\Omega} \bar{Q} \delta \bar{u} d\Omega + \int_{\Sigma} \bar{P} \delta \bar{u} d\Sigma, \quad (4)$$

где $\sigma^{\alpha\beta}$ - тензор напряжений, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ - тензор деформаций плоской задачи ($\alpha = 1, 2$), \bar{Q} - вектор массовых сил, \bar{P} - вектор поверхностной нагрузки, \bar{u} - вектор перемещения, Σ - поверхность полосы, на которой задана поверхностная нагрузка.

Получены дифференциальные уравнения равновесия и статические краевые условия для симметричной (u, σ_x, σ_y - четные, а v, τ_{xy} - нечетные функции от ζ , $2X_1 = X^+ + X^-$, $2Y_1 = Y^+ - Y^-$) и кососимметричной (u, σ_x, σ_y - нечетные, а v, τ_{xy} - четные функции от ζ , $2X_2 = X^+ - X^-$, $2Y_2 = Y^+ + Y^-$) задач, которые являются сингулярно возмущенными малым геометрическим параметром ε . Решение такой сингулярно возмущенной системы уравнений складывается из решения внутренней задачи (основного напряженного состояния - ОНС) и решения пограничного слоя (РТП).

Во втором параграфе определяется основное напряженное состояние полосы, для чего перемещения симметричной задачи представляются в виде разложения по малому параметру ε

$$u_{2i}(\xi, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{N_s} u_{2i}^s(\xi) \varepsilon^s, \quad v_{2i+1}(\xi, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{N_s} v_{2i+1}^s(\xi) \varepsilon^s, \quad (5)$$

а для задачи изгиба

$$u_{2i+1}(\xi, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{N_s} u_{2i+1}^s(\xi) \varepsilon^s, \quad v_{2i}(\xi, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{N_s} v_{2i}^s(\xi) \varepsilon^s. \quad (6)$$

Разложения (5)-(6) подставляем в полученные уравнения равновесия и группируем слагаемые при каждой степени параметра ε . Поскольку эти уравнения должны удовлетворяться для всех значений ε , и последовательность степеней ε линейно независима, то выражения при каждой степени малого параметра обращаются в нуль независимо. Тогда из основного уравнения при δu_0 получим для симметричной задачи одну основную искомую функцию u_0^s , для нахождения которой получим уравнение

$$E_1 \frac{d^2 u_0^s}{d\xi^2} = p^s, \quad (7)$$

где $p^0 = -\frac{X_1}{\varepsilon} - \nu_{21} \frac{dY_1}{d\xi}$, $p^1 = 0$, при $s \geq 2$ $p^s = -\nu_{12} \frac{E_1}{E_2} \frac{d\sigma_{y,0}^s}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{3} \sigma_{x,2}^{s-2} + \frac{1}{5} \sigma_{x,4}^{s-4} + \dots \right)$.

Все остальные характеристики НДС внутренней задачи после нахождения $\sigma_{x,0}^s$ определяются из оставшихся уравнений равновесия простейшими дифференциальными соотношениями

$$\begin{aligned} \tau_{xy,1}^s &= \frac{X_1}{\varepsilon} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{3} \sigma_{x,2}^{s-2} + \frac{1}{5} \sigma_{x,4}^{s-4} + \dots \right), \quad \tau_{xy,3}^{s-2} = -\frac{1}{3} \frac{d\sigma_{x,2}^{s-2}}{d\xi}, \quad \tau_{xy,5}^{s-4} = -\frac{1}{5} \frac{d\sigma_{x,4}^{s-4}}{d\xi}, \dots \\ \sigma_{y,0}^s &= Y_1 + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{2} \tau_{xy,1}^{s-2} + \frac{1}{4} \tau_{xy,3}^{s-4} + \dots \right), \quad \sigma_{y,2}^{s-2} = -\frac{1}{2} \frac{d\tau_{xy,1}^{s-2}}{d\xi}, \quad \sigma_{y,4}^{s-4} = -\frac{1}{4} \frac{d\tau_{xy,3}^{s-4}}{d\xi}, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее все величины с отрицательными индексами тождественны нулю.

Для задачи изгиба основная искомая функция v_0^s определяется уравнением

$$E_1 \frac{d^4 v_0^s}{d\xi^4} = q^s, \quad (9)$$

$$q^s = q_y^s + \frac{dq_x^s}{d\xi} + \frac{E_1}{G_{12}} \frac{d^3 \tau_{xy,0}^s}{d\xi^3} + \nu_{21} \frac{d^2 \sigma_{y,1}^s}{d\xi^2} + 3 \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{5} \sigma_{x,3}^{s-2} + \frac{1}{7} \sigma_{x,5}^{s-4} + \dots \right),$$

где $q_y^0 = q/J$, $q_x^0 = m/J$, при $s \geq 1$ $q_y^s = q_x^s = 0$, $q = 2Y_2 a^3$, $m = 2X_2 a^2 h$, $J = 2h^3/3$.

После определения v_0^s по соотношениям упругости определяются $\sigma_{x,1}^s$, а затем

$$\begin{aligned} \tau_{xy,0}^s &= \frac{1}{3} q_x^{s-2} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{2} \sigma_{x,1}^{s-2} + \frac{1}{4} \sigma_{x,3}^{s-4} + \dots \right), \quad \tau_{xy,2}^{s-2} = -\frac{1}{2} \frac{d\sigma_{x,1}^{s-2}}{d\xi}, \quad \tau_{xy,4}^{s-4} = -\frac{1}{4} \frac{d\sigma_{x,3}^{s-4}}{d\xi}, \dots \\ \sigma_{y,1}^s &= \frac{1}{3} q_y^{s-2} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{3} \tau_{xy,2}^{s-2} + \frac{1}{5} \tau_{xy,4}^{s-4} + \dots \right), \quad \sigma_{y,3}^{s-2} = -\frac{1}{3} \frac{d\tau_{xy,2}^{s-2}}{d\xi}, \quad \sigma_{y,5}^{s-4} = -\frac{1}{5} \frac{d\tau_{xy,4}^{s-4}}{d\xi}, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Из соотношений (7)-(10) видно, что выполняются все уравнения плоской задачи теории упругости.

Таким образом величина вносимой поправки зависит от изменяемости внешней нагрузки и от отношения упругих коэффициентов ортотропного тела. Для внешней нагрузки, не обладающей большой изменяемостью, но при значительном отношении E_1/G_{12} добавка в ОНС может быть существенной. Теория плоских сечений (теория Бернулли) для изотропных полос, если изменяемость внешней нагрузки невелика, асимптотически верна, что отмечалось многими авторами.

Решение задачи погранслоя для полосы рассматривается в третьем параграфе. Для построения погранслоя у края $\xi = 0$ (второе расщепление

возмущенного оператора у края) в уравнения плоской задачи теории упругости вводят растяжение координаты $t = \xi / \varepsilon$. Этим выделяются главные члены при дифференцировании по продольной координате.

Решение уравнений погранслоя ищем в виде функций погранслоя

$$R_p(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{\kappa_p + s} R_p^s e^{-\lambda t}, \quad (11)$$

где R_p - любое из напряжений и перемещений погранслоя. Здесь и далее всем величинам погранслоя приписывается индекс p, κ_p - показатель интенсивности погранслоя, вещественное число. Показатель подбирается таким образом, чтобы после подстановки в уравнения погранслоя получить непротиворечивую систему уравнений для определения R_p^s , λ - характеризует степень изменяемости погранслоя. По свойству погранслоя функция решения должна затухать при $t \rightarrow \infty$, поэтому $\text{Re} \lambda > 0$.

Без учета решения задачи погранслоя не удастся удовлетворить поставленные краевые условия и это еще раз подтверждает сингулярность задачи.

В диссертации получены РТП для симметричной и кососимметричной задач плоской задачи теории упругости, процесс получения которых представим для кососимметричной задачи.

В задаче изгиба выбираем

$$\begin{aligned} (\sigma_{xp,2i+1}, \sigma_{yp,2i+1}) &= \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+\kappa_p-1} (\sigma_{xp,2i+1}^s, \sigma_{yp,2i+1}^s) e^{-\lambda t}, \\ (\tau_{xyp,2i}, u_{p,2i+1}) &= \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+\kappa_p} (\tau_{xyp,2i}^s, u_{p,2i+1}^s) e^{-\lambda t}, \quad v_{p,2i} = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+\kappa_p+1} v_{p,2i}^s e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\kappa_p = \kappa - 2i$ и κ - целое число, которое определяется при рассмотрении вопроса взаимодействия погранслоя с ОНС.

После подстановки (12) в уравнения равновесия погранслоя получим однородную алгебраическую систему уравнений относительно компонентов вектора перемещений $u_{p,2i+1}, v_{p,2i}$, которая содержит показатель изменяемости погранслоя λ . Из условия существования ненулевых решений однородной алгебраической системы уравнений получим обобщенную собственную проблему

$$(B^{-1}A - E\lambda)X = 0, \quad (13)$$

где матрицы A и B содержат механические характеристики материала и являются матрицами вида: A - матрица общего вида, B - симметричная матрица, E - единичная матрица, X - вектор решения.

Составлена и реализована программа по решению проблемы (13) на ПЭВМ, корни решения которой зависят от выбранной модели и от отношений E_1/G_{12} ,

E_1/E_2 . Для реальных ортотропных материалов в большинстве случаев имеем действительные корни собственной проблемы, и наблюдается тенденция уменьшения скорости затухания плоского погранслоя по сравнению с такими же задачами из изотропного материала.

Модель Тимошенко для изгиба стержня ($u=u_1z$, $v=v_0$) не улавливает погранслоя и описывает только ОНС. Первый ненулевой корень для симметричной задачи стержня из изотропного материала $Re\lambda=2.105$, а для задачи изгиба $Re\lambda=3.75$. Это показывает, что погранслоя в задаче изгиба затухает быстрее, чем в задаче растяжения-сжатия. Для ортотропного материала меняются не только значения корней собственной проблемы, но и характер убывания погранслоя.

В четвертом параграфе рассматриваются условия существования затухающих решений. Они получены из первых уравнений равновесия задачи погранслоя при условии, что они должны быть выражены в терминах поставленного краевого условия. Для задачи растяжения-сжатия полосы имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sigma_{xp} d\zeta &= 0 \quad (\text{статическое краевое условие}), \\ \int_0^1 u_p d\zeta + \varepsilon \frac{v_{12}}{E_2} \int_0^1 \tau_{xyp} \zeta d\zeta &= 0 \quad (\text{заданы } u_\Sigma, p_y), \\ \int_0^1 u_p d\zeta + v_{12} \int_0^\infty \frac{1}{dt} \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial \zeta} p d\zeta &= 0 \quad (\text{кинематическое краевое условие}), \end{aligned} \quad (14)$$

а для задачи изгиба

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \zeta \sigma_{xp} d\zeta &= 0, \quad \int_{-1}^1 \tau_{xyp} d\zeta = 0 \quad (\text{статические краевые условия}), \\ 2 \int_0^1 u_p \zeta d\zeta + \varepsilon \frac{v_{12}}{E_2} \int_0^1 \tau_{xyp} \zeta^2 d\zeta &= 0, \quad \int_{-1}^1 \tau_{xyp} d\zeta = 0 \quad (\text{заданы } u_\Sigma, p_y), \\ \varepsilon \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{v_{12}}{2E_2} \right) \int_0^1 \zeta^3 \sigma_{xp} d\zeta + 3 \int_0^1 (1-\zeta^2) v_p d\zeta &= 0, \quad \int_{-1}^1 \zeta \sigma_{xp} d\zeta = 0 \quad (\text{заданы } v_\Sigma, p_x), \\ \int_0^1 \zeta u_p d\zeta + v_{12} \int_0^\infty \frac{1}{dt} \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial \zeta} \zeta d\zeta &= 0, \quad \int_0^1 v_p d\zeta + \int_0^\infty \frac{1}{dt} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} p d\zeta = 0 \quad (\text{кинематические краевые условия}) \end{aligned} \quad (15)$$

Видно, что условия существования кинематических краевых условий не имеют простого вида, так как содержат интегрирование по t .

В пятом параграфе показано использование условий существования затухающих решений для получения краевых условий внутренней задачи, а в шестом параграфе - вариационный подход к разделению краевых условий.

Использовано асимптотически точное выражение полного решения плоской задачи теории упругости I

$$I = Q + R_p^{(1)} + R_p^{(2)}, \quad (16)$$

где Q -решение внутренней задачи, а $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}$ - решения погранслоев для краев $x = 0, x = a$ соответственно.

Представление (16) имеет принципиальный характер, так как погранслои оказывают влияние на внутреннюю задачу тем, что он входит в описание краевых условий и вопрос разделения их упирается в определенные трудности. Проще всего они разделяются через условия существования затухающих решений, которые не всегда имеют простой вид.

Для всех видов краевых условий, полученных вариационным путем, найдены параметры k и показаны процедуры получения краевых условий для определения ОНС и погранслоев. Так для задачи изгиба кинематические краевые условия внутренней задачи определяются при любом s из алгебраической системы

$$\begin{aligned} A_1 v_0^s - A_2 \frac{dv_0^{s-1}}{d\xi} &= u_\Sigma^{s-1} - P_u^{s-1} - P_v^s - \frac{A_2}{G_{12}} \tau_{xy,0}^{s-1} - A_4 u_3^{s-3} - A_3 v_2^{s-2} - A_5 v_4^{s-4}, \\ B_1 v_0^s - B_2 \frac{dv_0^{s-1}}{d\xi} &= v_\Sigma^{s-1} - \bar{P}_u^{s-1} - \bar{P}_v^s - \frac{B_2}{G_{12}} \tau_{xy,0}^{s-1} - B_4 u_3^{s-3} - B_3 v_2^{s-2} - B_5 v_4^{s-4}. \end{aligned} \quad (17)$$

Все коэффициенты этой системы приведены в диссертации.

Краевые условия (17) показывают сложный характер получения кинематических краевых условий внутренней задачи. Уточнение ОНС начинается с $s=1$, а не с $s=2$ как это имеет место при остальных краевых условиях.

В седьмом параграфе приводится упрощенный вариант получения краевых условий внутренней задачи, который является фактически обобщением решения в полиномах и который известен в литературе как полуобратный метод Межане-Тимошенко.

Во второй главе рассмотрена трехмерная задача теории упругости ортотропного тела. В первом параграфе приводится вариационная постановка трехмерной задачи теории упругости для ортотропной пластины толщиной $2h$, которая принимается малой по отношению к двум другим размерам пластины $a \times b$. С срединной плоскостью пластины связываем ортогональную систему координат x и y , а ось z направляется по нормали к срединной поверхности. Будем считать, что главные направления упругости совпадают с направлением координатных линий. Рассмотрим случай, когда на лицевых поверхностях пластины заданы значения усилий

$$\tau_{xz} = \pm X^\pm(x, y), \quad \tau_{yz} = \pm Y^\pm(x, y), \quad \sigma_z = \pm Z^\pm(x, y). \quad (18)$$

Решение поставленной задачи есть сумма решения симметричной задачи (задача растяжения-сжатия) и кососимметричной задачи (задача изгиба), которым соответствуют граничные условия при $z=\pm h$:

симметричная задача $\tau_{xz}^c = \pm q_x^c / 2, \quad \tau_{yz}^c = \pm q_y^c / 2, \quad \sigma_z^c = q_z^c / 2;$

$$\text{кососимметричная задача} \quad \tau_{xz}^k = q_x^k / 2, \quad \tau_{yz}^k = q_y^k / 2, \quad \sigma_z^k = \pm q_z^k / 2, \quad (19)$$

где $q_x^c = X^+ + X^-$, $q_x^k = X^+ - X^-$, $q_y^c = Y^+ + Y^-$, $q_y^k = Y^+ - Y^-$, $q_z^c = Z^+ - Z^-$, $q_z^k = Z^+ + Z^-$.

Вектор перемещений $\bar{u}(x, y, z)$ представляется в виде бесконечного ряда по поперечной координате и с учетом вариационного принципа Лагранжа в безразмерных координатах и перемещениях получаем бесконечную систему уравнений равновесия в перемещениях, которая для задачи изгиба имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} \left[b_{ik} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \sigma_{x,2i+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy,2i+1}}{\partial \eta} \right) - c_{ik} \tau_{xz,2i} \right] + q_x^k &= 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} \left[b_{ik} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \tau_{xy,2i+1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy,2i+1}}{\partial \eta} \right) - c_{ik} \tau_{yz,2i} \right] + q_y^k &= 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} \varepsilon^{2i+1} \left(\frac{\partial \tau_{xz,2i}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz,2i}}{\partial \eta} - 2k B_{33} \sigma_{z,2i+1} \right) + q_z^k &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

при $k = 0, 1, \dots$; $a_{ik} = 1/(2i + 2k + 1)$, $b_{ik} = 1/(2i + 2k + 3)$, $c_{ik} = (2k + 1)/(2i + 2k + 1)$, напряжения определяются известными соотношениями упругости а B_{33} - модуль упругости ортотропного материала определяемого соотношением

$$\sigma_z = B_{31} \varepsilon_x + B_{32} \varepsilon_y + B_{33} \varepsilon_z.$$

В диссертации приведены уравнения и симметричной задачи и соответствующие краевые условия.

Во втором параграфе проводится асимптотический анализ полученных систем уравнений (20) по малому параметру ε

$$Q_k(\xi, \eta, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_k^s(\xi, \eta) \varepsilon^s, \quad (21)$$

где Q_k есть каждое из компонентов НДС внутренней задачи изгиба :

$$u_{2i+1}, v_{2i+1}, w_{2i}, \sigma_{x,2i+1}, \sigma_{y,2i+1}, \sigma_{z,2i+1}, \tau_{xy,2i+1}, \tau_{xz,2i}, \tau_{yz,2i}.$$

При $s=0$ из системы (20) следуют соотношения, которые являются следствием гипотез Кирхгофа $\tau_{xz,0}^0 = \tau_{yz,0}^0 = \sigma_{z,1}^0 = 0$ или

$$u_1^0 = -\frac{\partial w_0^0}{\partial \xi}, \quad v_1^0 = -\frac{\partial w_0^0}{\partial \eta}, \quad 2w_2^0 = -\beta_{31} \frac{\partial u_1^0}{\partial \xi} - \beta_{32} \frac{\partial v_1^0}{\partial \eta}.$$

На этом этапе готовится информация, которая используется в дальнейшем. Аналогичные соотношения имеют место при $s=1$. Таким образом, гипотезы Кирхгофа являются первым асимптотическим приближением решения задачи теории упругости для пластины. Для определения основного неизвестного задачи изгиба пластины w_0^s получаем бигармоническую проблему

$$C_{11} \frac{\partial^4 w_0^{s-2}}{\partial \xi^4} + 2(C_{12} + 2G_{12}) \frac{\partial^4 w_0^{s-2}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + C_{22} \frac{\partial^4 w_0^{s-2}}{\partial \eta^4} = q^{s-2}. \quad (22)$$

$$\text{Здесь } q^{s-2} = \bar{q}^{s-2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{C_{11}}{G_{13}} \frac{\partial \tau_{xz,0}^{s-2}}{\partial \xi} + \frac{C_{12}}{G_{23}} \frac{\partial \tau_{yz,0}^{s-2}}{\partial \eta} + \frac{B_{13}}{B_{33}} \sigma_{z,1}^{s-2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{G_{12}}{G_{23}} \frac{\partial \tau_{yz,0}^{s-2}}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + \frac{G_{12}}{G_{13}} \frac{\partial \tau_{xz,0}^{s-2}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{C_{12}}{G_{13}} \frac{\partial \tau_{xz,0}^{s-2}}{\partial \xi} + \frac{C_{22}}{G_{23}} \frac{\partial \tau_{yz,0}^{s-2}}{\partial \eta} + \frac{B_{23}}{B_{33}} \sigma_{z,1}^{s-2} \right).$$

Оставшиеся уравнения рассматриваются как системы линейных алгебраических уравнений для определения $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$, решение которых представляются в виде

$$\begin{aligned} \tau_{xz,0}^s &= \frac{m_x^{s-2}}{3J} + \frac{1}{2} L_{1,1}^{s-2} + \frac{1}{4} L_{1,3}^{s-4} + \dots, \quad \tau_{xz,2}^{s-2} = -\frac{1}{2} L_{1,1}^{s-2}, \quad \tau_{xz,4}^{s-4} = -\frac{1}{4} L_{1,3}^{s-4}, \dots \\ \tau_{yz,0}^s &= \frac{m_y^{s-2}}{3J} + \frac{1}{2} L_{2,1}^{s-2} + \frac{1}{4} L_{2,3}^{s-4} + \dots, \quad \tau_{yz,2}^{s-2} = -\frac{1}{2} L_{2,1}^{s-2}, \quad \tau_{yz,4}^{s-4} = -\frac{1}{4} L_{2,3}^{s-4}, \dots \\ \sigma_{z,1}^s &= \frac{q_z^{s-2}}{3J} + \frac{1}{3} L_{3,2}^{s-2} + \frac{1}{5} L_{3,4}^{s-4} + \dots, \quad \sigma_{z,2}^{s-2} = -\frac{1}{3} L_{3,2}^{s-2}, \quad \sigma_{z,5}^{s-4} = -\frac{1}{5} L_{3,4}^{s-4}, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь используются обозначения

$$L_{1,k} = \frac{\partial \sigma_{x,k}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy,k}}{\partial \eta}, \quad L_{2,k} = \frac{\partial \tau_{xy,k}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{y,k}}{\partial \eta}, \quad L_{3,k} = \frac{\partial \tau_{xz,k}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz,k}}{\partial \eta}.$$

Таким образом для задачи изгиба выполняются все соотношения теории упругости.

Аналогично показывается, что и симметричная задача сводится к бигармонической проблеме относительно основных переменных u_0^s, v_0^s , которая при $s=0$ совпадает с соответствующими уравнениями классической теории. При $s \geq 1$ они отличаются от классических лишь правыми частями, определяемыми из предыдущих приближений. Нахождение ОНС пластины с заданной точностью сводится к решению (необходимое число раз) известных и хорошо изученных уравнений. Поправка к результатам, полученным по классической теории, зависит от отношений $G_{12}/G_{\alpha 3}, \bar{E}_\alpha/B_{33}, B_{\alpha 3}/B_{33}$ ($\alpha=1,2$). Показывается вся цепочка вычислений, которая начинается с определения w_0^0 (задача изгиба) или u_0^0, v_0^0 (симметричная задача).

В третьем и четвертом параграфах строятся решения погранслоев соответственно для симметричной и кососимметричной задач пластины. В автореферате показывается определение этих погранслоев для задачи изгиба пластины у края $x=0$, для чего проводится растяжение координаты $t=\varepsilon \xi$ ($t>0$). Асимптотический анализ уравнений равновесия показывает, что эти уравнения распадаются на две группы, каждая из которых соответствует одному погранслою: краевой антиплоской деформации (краевому скручиванию) и краевой обобщенной плоской деформации.

Основными величинами погранслоя антиплоская деформация являются величины v, τ_{xy}, τ_{yz} , для которых принимается

$$\tau_{xy,2i+1}^a = \sum_{s=0} \varepsilon^{p-1} \tau_{xy,2i+1}^s, \quad \begin{pmatrix} a & a \\ v_{2i+1}, & \tau_{yz,2i} \end{pmatrix} = \sum_{s=0} \varepsilon^p \begin{pmatrix} a & a \\ v_{2i+1}^s, & \tau_{yz,2i}^s \end{pmatrix}, \quad (24)$$

для вспомогательных величин имеем

$$\begin{aligned} (\sigma_{x,2i+1}^a, \sigma_{y,2i+1}^a, \sigma_{z,2i+1}^a) &= \sum_{s=0} \varepsilon^p (\sigma_{x,2i+1}^s, \sigma_{y,2i+1}^s, \sigma_{z,2i+1}^s), \\ (u_{2i+1}^a, \tau_{xz,2i}^a) &= \sum_{s=0} \varepsilon^{p+1} (u_{2i+1}^s, \tau_{xz,2i}^s), \quad w_{2i}^a = \sum_{s=0} \varepsilon^{p+2} w_{2i}^s, \quad p = s + \kappa_a - 2i. \end{aligned} \quad (25)$$

Для определения основных величин с точностью ε^2 имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{3} \tau_{xy,1}^s + \frac{1}{5} \tau_{xy,3}^s + \dots \right) - \left(\tau_{yz,0}^s + \frac{1}{3} \tau_{yz,2}^s + \frac{1}{5} \tau_{yz,4}^s + \dots \right) &= - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{3} \sigma_{y,1}^{s-2} + \frac{1}{5} \sigma_{y,3}^{s-2} + \dots \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{5} \tau_{xy,1}^s + \frac{1}{7} \tau_{xy,3}^s + \dots \right) - 3 \left(\frac{1}{3} \tau_{yz,0}^s + \frac{1}{5} \tau_{yz,2}^s + \frac{1}{7} \tau_{yz,4}^s + \dots \right) &= - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{5} \sigma_{y,1}^{s-2} + \frac{1}{7} \sigma_{y,3}^{s-2} + \dots \right), \\ \tau_{xy,2i+1}^s &= G_{12} \left(\frac{\partial u_{2i+1}^{s-2}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_{2i+1}^s}{\partial t} \right), \quad \tau_{yz,2i}^s = G_{23} \left(\frac{\partial w_{2i}^{s-2}}{\partial \eta} + (2i+1) v_{2i+1}^s \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Оставшиеся уравнения служат для определения остальных составляющих НДС. При $s=0$ решение однородной системы уравнений (26) ищем в форме Фурье

$$v_{2i+1}^0 = F_{i+1}^0(\eta) e^{-\mu t}, \quad i = 0, 1, \dots,$$

где $F_{i+1}^0(\eta)$ - функция интегрирования, μ - показатель изменяемости погранслоя. Из условия существования ненулевых решений (26) имеем алгебраическое характеристическое уравнение четвертого порядка

$$\mu^4 - 45 \frac{G_{23}}{G_{12}} \mu^2 + 105 \left(\frac{G_{23}}{G_{12}} \right)^2 = 0. \quad (27)$$

Антиплоскому погранслою соответствуют два положительных корня

$$\mu_1 = 1.571 \sqrt{\frac{G_{23}}{G_{12}}}, \quad \mu_2 = 6.522 \sqrt{\frac{G_{23}}{G_{12}}}.$$

В данной модели расчета μ_1 совпадает с точным решением $\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \sqrt{\frac{G_{23}}{G_{12}}}$ ($n=1,2,\dots$), а μ_2 отличается значительно. С увеличением числа искомых функций погранслоя все больше первых корней μ_n будет приближаться к точным значениям. Однако это не имеет принципиального значения, так как характер проникновения погранслоя связан только с первым ненулевым корнем.

Показан процесс получения вспомогательных величин погранслоя, который имеет смысл только при переменной по η функции интегрирования $F_k(\eta)$.

Большое влияние на скорость убывания погранслоя оказывает отношение $\sqrt{G_{23}/G_{12}}$ и при малом отношении проникновение погранслоя может быть значительным, поэтому в литературе этот погранслоем считается “слабым”. Анализ показывает, что модель Тимошенко-Рейсснера для пластины ($u=u_1z$, $v=v_1z$, $w=w_0$) содержит этот погранслоем и только за счет этого идет уточнение краевых условий.

Для антиплоской деформации при $s=0,1$ из первого уравнения (26) и уравнения вспомогательной системы

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\tau_{xz,0}^s + \frac{1}{3} \tau_{xz,2}^s + \dots \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\tau_{yz,0}^s + \frac{1}{3} \tau_{yz,2}^s + \dots \right) = 0$$

после интегрирования по t следует условие существования затухающего решения

$$\frac{1}{-1} \int \left(\tau_{xz}^s + \zeta \frac{\partial \tau_{xy}^s}{\partial \eta} \right) d\zeta = 0, \quad (28)$$

которое отсутствует в литературе в таком виде. Соотношение (28) есть математическое обоснование сведения трех краевых условий для пластины к двум. Физический смысл такого уменьшения числа граничных условий был разъяснен Томсоном и Тэтом.

В задаче изгиба получены условия существования затухающего решения для антиплоского погранслоя при некоторых условиях

$$\begin{aligned} \frac{1}{-1} \int \sigma_x^s \zeta d\zeta + 2G_{12} \frac{1}{-1} \int \frac{\partial v^s}{\partial \eta} \zeta d\zeta &= 0 \quad (\text{заданы } \sigma_x, v_\Sigma, w_\Sigma), \\ G_{12} \frac{1}{-1} \int \frac{\partial v^s}{\partial \eta} \zeta d\zeta + \int_0^\infty \frac{1}{dt} \int \tau_{xz}^s d\zeta &= 0 \quad (\text{заданы } u_\Sigma, v_\Sigma, \tau_{xz}), \\ \frac{1}{-1} \int \left(\frac{G_{12}}{G_{13}} \frac{\partial v^s}{\partial \eta} \zeta + w^s \right) d\zeta + \int_0^\infty \frac{1}{dt} \int \frac{\partial u^s}{\partial \zeta} d\zeta &= 0 \quad (\text{заданы } u_\Sigma, v_\Sigma, w_\Sigma). \end{aligned} \quad (29)$$

Два последних выражения не имеют простого вида, так как содержат интегрирование по координате t .

Для симметричной задачи условие существования затухающего решения при $s=0,1$ сводится к хорошо известному выражению $\frac{1}{-1} \int \tau_{xy}^s d\zeta = 0$, т.е. антиплоский погранслоем может взять на себя ту касательную нагрузку, которая не приводит к

возникновению сдвигающего фактора. Для геометрического краевого условия имеем условие $\int_{-1}^1 v^s d\zeta = 0$.

Для величин погранслоя краевая обобщенная плоская деформация вводится индекс “р”. Основными величинами являются перемещения u, w и напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}$; вспомогательными величинами- перемещение v и напряжения τ_{xy}, τ_{yz} . Чтобы система уравнений теории упругости была непротиворечивой, необходимо принять для основных величин задачи изгиба

$$\begin{aligned} (\sigma_{x,2i+1}^p, \sigma_{y,2i+1}^p, \sigma_{z,2i+1}^p) &= \sum_{s=0}^p \varepsilon^{r-1} (\sigma_{x,2i+1}^s, \sigma_{y,2i+1}^s, \sigma_{z,2i+1}^s), \\ (u_{2i+1}^p, \tau_{xz,2i}^p) &= \sum_{s=0}^p \varepsilon^r (u_{2i+1}^s, \tau_{xz,2i}^s), \quad w_{2i}^p = \sum_{s=0}^p \varepsilon^{r+1} w_{2i}^s, \end{aligned} \quad (30)$$

а для вспомогательных величин

$$\tau_{xy,2i+1}^p = \sum_{s=0}^p \varepsilon^r \tau_{xy,2i+1}^s, \quad (v_{2i+1}^p, \tau_{yz,2i}^p) = \sum_{s=0}^p \varepsilon^{r+1} (v_{2i+1}^s, \tau_{yz,2i}^s), \quad (31)$$

где $r = s + \kappa_p - 2i, \kappa_p$ - целое число, характеризующее интенсивность погранслоя, который определяется из условия согласования погранслоя с ОНС.

Система уравнений, описывающая поведение основных величин погранслоя, записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{3} \sigma_{x,1}^p + \frac{1}{5} \sigma_{x,3}^p + \dots \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{3} \tau_{xy,1}^{s-2} + \frac{1}{5} \tau_{xy,3}^{s-2} + \dots \right) - \left(\tau_{xz,0}^s + \frac{1}{3} \tau_{xz,2}^s + \dots \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{5} \sigma_{x,1}^p + \frac{1}{7} \sigma_{x,3}^p + \dots \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{5} \tau_{xy,1}^{s-2} + \frac{1}{7} \tau_{xy,3}^{s-2} + \dots \right) - 3 \left(\frac{1}{3} \tau_{xz,0}^s + \frac{1}{5} \tau_{xz,2}^s + \dots \right) &= 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\tau_{xz,0}^s + \frac{1}{3} \tau_{xz,2}^s + \dots \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\tau_{yz,0}^{s-2} + \frac{1}{3} \tau_{yz,2}^{s-2} + \dots \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{3} \tau_{xz,0}^s + \frac{1}{5} \tau_{xz,2}^s + \dots \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{3} \tau_{yz,0}^{s-2} + \frac{1}{5} \tau_{yz,2}^{s-2} + \dots \right) - 2 \left(\frac{1}{3} \sigma_{z,1}^p + \frac{1}{5} \sigma_{z,3}^p + \dots \right) &= 0, \\ \dots, \\ \sigma_{x,2i+1}^p &= B_{11} \frac{\partial u_{2i+1}^s}{\partial t} + B_{12} \frac{\partial v_{2i+1}^{s-2}}{\partial \eta} + B_{13} (2i+2) w_{2i+2}^s, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
(w_{0,u_1}^0, w_{0,u_2}^0, w_{0,u_3}^0, w_{0,u_4}^0) &= \sum_{k=1}^3 (\alpha_{1k}^0, \alpha_{2k}^0, \alpha_{3k}^0, \alpha_{4k}^0, \alpha_{5k}^0) \Phi_k^0(\eta) e^{-\lambda_k t}, \\
(\sigma_{x,1}^0, \sigma_{x,3}^0, \sigma_{y,1}^0, \sigma_{y,3}^0) &= \sum_{k=1}^3 (C_{1k}^0, C_{3k}^0, D_{1k}^0, D_{3k}^0) \Phi_k^0(\eta) e^{-\lambda_k t}, \\
\tau_{xz,0}^0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \sigma_{x,1}^0 + \frac{1}{4} \sigma_{x,3}^0 + \dots \right), \quad \tau_{xz,2}^0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{x,1}^0}{\partial t}, \quad \tau_{xz,4}^0 = -\frac{1}{4} \frac{\partial \sigma_{x,3}^0}{\partial t}, \dots, \\
\sigma_{z,1}^0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{3} \tau_{xz,2}^0 + \frac{1}{5} \tau_{xz,4}^0 + \dots \right), \quad \sigma_{z,3}^0 = -\frac{1}{3} \frac{\partial \tau_{xz,2}^0}{\partial t}, \quad \sigma_{z,5}^0 = -\frac{1}{5} \frac{\partial \tau_{xz,4}^0}{\partial t}, \dots, \\
(v_1^0, v_3^0) &= \sum_{k=1}^3 (\rho_{1k}^0, \rho_{2k}^0) \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial \eta} e^{-\lambda_k t}, \quad (\tau_{xy,1}^0, \tau_{xy,3}^0) = \sum_{k=1}^3 (H_{1k}, H_{2k}) \frac{\partial \Phi_k^0}{\partial \eta} e^{-\lambda_k t}, \\
\tau_{yz,0}^0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \tau_{xy,1}^0 + \frac{1}{4} \tau_{xy,3}^0 + \dots \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{2} \sigma_{y,1}^0 + \frac{1}{4} \sigma_{y,3}^0 + \dots \right), \\
\tau_{yz,2}^0 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau_{xy,1}^0}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{y,1}^0}{\partial \eta} \right), \quad \tau_{yz,4}^0 = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \tau_{xy,3}^0}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{y,3}^0}{\partial \eta} \right), \dots
\end{aligned} \tag{35}$$

При $s=0,1$ получены условия существования затухающих решений, которые по структуре совпадают с соответствующими условиями плоской задачи.

Наличие решения для вспомогательных величин задач погранслоев в пластине могут приводить к появлению на краю дополнительных величин НДС, которые снимаются решениями соответствующих задач погранслоя при $s \geq 0$. Указанные решения зависят от вида функций интегрирования $F_k^s(\eta)$, $\Phi_k^s(\eta)$.

В параграфах пять-девять показан процесс разделения краевых условий определения ОНС и двух погранслоев для всех случаев постановки краевых условий, полученных вариационным путем. Определены параметры κ_a, κ_p для рассмотренных краевых условий и установлен порядок разделения краевых условий определения ОНС и погранслоев, который для различных приближений s может различаться. Асимптотический анализ проведен до $s=2$ включительно. Ниже приводятся полученные результаты для $s=0,1$, которые чаще всего встречаются на практике.

В пятом параграфе рассмотрены статические краевые условия (заданы p_x, p_y, p_z). Для бигармонической задачи изгиба при $\kappa_a = 1, \kappa_p = 2$ получены краевые условия определения ОНС

$$\begin{aligned}\sigma_{x,1}^0 &= \sigma_\Sigma, \quad 3\tau_{xz,0}^2 + \tau_{xz,2}^0 + \frac{\partial \tau_{xy,1}^0}{\partial \eta} = 2\tau_\Sigma + \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial \eta}, \\ \sigma_{x,1}^1 &= 3B \frac{\partial}{\partial \eta} (\tau_\Sigma - \tau_{xy,1}^0), \quad 3\tau_{xz,0}^3 + \tau_{xz,2}^1 + \frac{\partial \tau_{xy,1}^1}{\partial \eta} = 0,\end{aligned}\tag{36}$$

$$\text{где } p_x = \varepsilon \sigma_\Sigma(\eta) \zeta, \quad p_y = \varepsilon \tau_\Sigma(\eta) \zeta, \quad p_z = \varepsilon^2 (1 - \zeta^2) \tau_\Sigma, \quad B = \frac{1}{G_{12}} \sum_{k=1}^2 q_{k1} \left(\frac{1}{3} C_{1k}^0 + \frac{1}{5} C_{3k}^0 \right),$$

которые зависят от решения задачи погранслоя. Предложенный подход показывает, что учет краевого скручивания уточняет краевое условие при $s=1$, причем уточнение для ортотропных пластин может быть значительным и зависит от степени анизотропности материала. Для симметричной задачи принимаем $\kappa_a=1$, $\kappa_p=1$ и краевую нагрузку представляем в виде $p_x = \sigma_\Sigma$, $p_y = \tau_\Sigma$, $p_z = \varepsilon \tau_\Sigma \zeta$.

Краевые условия внутренней задачи

$$\sigma_{x,0}^0 = \sigma_\Sigma, \quad \tau_{xy,0}^0 = \tau_\Sigma, \quad \sigma_{x,0}^1 = 0, \quad \tau_{xy,0}^1 = 0.\tag{37}$$

При $s=0,1$ имеют место погранслои, но они не влияют на решение внутренней задачи данных приближений. При $s \geq 2$ решения задач погранслоев влияют на решение внутренней задачи.

В шестом параграфе рассмотрено краевое условие “свободного шарнирного опирания” (заданы p_x , p_y , w_Σ). Для задачи изгиба принимаем $\kappa_a = \kappa_p = 1$, а краевую нагрузку в виде $p_x = \varepsilon \zeta \sigma_\Sigma$, $p_y = \varepsilon \zeta \tau_\Sigma$, $w_\Sigma = 0$. Имеем краевые условия внутренней задачи

$$\sigma_{x,1}^0 = \sigma_\Sigma, \quad w_0^0 = 0, \quad \sigma_{x,1}^1 = B \frac{\partial}{\partial \eta} (\tau_\Sigma - \tau_{xy,1}^0), \quad w_0^1 = 0.\tag{38}$$

Анализ краевых условий показывает, что влияние погранслоев на формирование краевых условий внутренней задачи больше сказывается в статическом краевом условии (σ_x), чем в геометрическом (w), в котором влияние погранслоев начинает сказываться только с $s \geq 2$, что практически выходит за рамки необходимой точности. Таким образом кинематическое условие классической теории обеспечивает большую точность определения внутреннего состояния, нежели статическое.

В симметричной задаче принимаем $\kappa_a = 1$, $\kappa_p = 0$ и $p_x = \sigma_\Sigma$, $p_y = \tau_\Sigma$, $w_\Sigma = 0$, что приводит к соотношениям

$$\sigma_{x,0}^0 = \sigma_\Sigma, \quad \tau_{xy,0}^0 = \tau_\Sigma, \quad \sigma_{x,0}^1 = 0, \quad \tau_{xy,0}^1 = A \frac{\partial w_1^0}{\partial \eta},\tag{39}$$

$$\text{где } A = -G_{12} \sum_{k=1}^4 g_{0k}^0 p_{k1}, \quad g_{0k}^0 = \alpha_{1k}^0 + \frac{1}{3} \alpha_{3k}^0 + \frac{1}{5} \alpha_{5k}^0 - \lambda_k (\rho_{1k}^0 + \frac{1}{3} \rho_{2k}^0 + \frac{1}{5} \rho_{3k}^0).$$

Неоднородное краевое условие при $s=1$ может дать значительное уточнение в определении ОНС пластины.

В седьмом параграфе рассматриваются смешанные условия второго рода (заданы $p_x, v_\Sigma = w_\Sigma = 0$). Процесс определения внутреннего и типа погранслоя напряженных состояний будет иметь итерационный характер в задаче изгиба лишь при $\kappa_a = 0, \kappa_p = 1$. Для внутренней задачи должны выполняться краевые условия

$$\sigma_{x,1}^0 = \sigma_\Sigma, w_0^0 = 0, \quad \sigma_{x,1}^1 = 0, w_0^1 = 0 \quad (40)$$

и, с учетом однородности дифференциального уравнения для w_0^1 , получим нулевое решение внутренней задачи. Анализ полученных решений для погранслоев показывает, что при $s=0,1$ только решение плоской деформации $\Phi_k^0 \neq 0$ при $\sigma_\Sigma \neq 0$, а $F_k^0 = F_k^1 = \Phi_k^1 = 0$ и погранслои не влияют на формирование краевых условий внутренней задачи. Эти положения приводят некоторых авторов, особенно использующих модель Тимошенко-Рейсснера, к неверным выводам об отсутствии погранслоев в пластине при краевом условии- шарнирного закрепления. Погранслои имеются, и их влияние особенно ощутимо при $s \geq 2$, которые не описываются моделью Тимошенко-Рейсснера.

Как известно, классическая теория не ставит разницы между условиями (38) и (40), которые различны в смысле приведения к двумерным теориям. Отсюда следует, что одним и тем же условиям классической модели расчета могут соответствовать несколько условий трехмерной задачи. Таким образом к классическому условию шарнирного опирания ближе условие (40), чем (38). Если в двумерной теории применять условия (38) и (40), тем самым будет подчеркнуто различие в краевых условиях трехмерной задачи.

Для симметричной задачи расчета пластины принимаем $\kappa_a = \kappa_p = 0$ и краевые условия определения ОНС имеют вид

$$\sigma_{x,0}^0 = p_{x,0}^0, v_0^0 = 0, \quad \sigma_{x,0}^1 = 0, v_0^1 = 0. \quad (41)$$

Аналогично задаче изгиба в симметричной задаче имеет место один погранслой $\Phi_k^0 \neq 0, F_k^0 = F_k^1 = \Phi_k^1 = 0$ при $s=0,1$ и поэтому краевые условия (41) ближе всего к классическим. Уточнения начинаются с $s \geq 2$.

В симметричной задаче условия (39) и (41) характеризуют совершенно различные закрепления: условие (39) соответствует в двумерной задаче обобщенно свободному краю, а (41) – закреплению в продольном направлении краю.

В восьмом параграфе рассматриваются краевые условия “свободного защемления” (заданы $u_\Sigma = 0, p_y, w_\Sigma = 0$). В задаче изгиба принимаем $\kappa_a = \kappa_p = 1$. Из асимптотического анализа для внутренней задачи имеем

$$w_0^0 = 0, \quad \frac{\partial w_0^0}{\partial \xi} = 0, \quad w_0^1 = 0, \quad \frac{\partial w_0^1}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^3 d_{ok} w_2^0, \quad (42)$$

где $d_{ok} = 3\left(\frac{1}{3}\alpha_{2k}^0 + \frac{1}{5}\alpha_{4k}^0\right)p_{k1}$. На этапе $s=0$ краевые условия для внутренней задачи устанавливаются независимо от погранслоев, а затем по ним определяются решения каждого погранслоя. При $s=1$ имеем ненулевое НДС внутренней задачи, которое формируется за счет краевого условия для $\partial w_0^1 / \partial \xi$, связанного с плоской деформацией.

Для симметричной задачи принимаем $\kappa_a = \kappa_p = 0$. Краевые условия определения ОНС запишем в виде

$$u_0^0 = 0, \quad \tau_{xy,0}^0 = \tau_\Sigma, \quad u_0^1 = dw_1^0, \quad \tau_{xy,0}^1 = G_{12}g \frac{\partial w_1^0}{\partial \eta}. \quad (43)$$

Здесь $d = \sum_{k=1}^4 d_{ok} p_{k1}$, $g = \sum_{k=1}^4 g_{ok} p_{k1}$, $d_{ok} = -(\alpha_{1k}^0 + \frac{1}{3}\alpha_{3k}^0 + \frac{1}{5}\alpha_{5k}^0)$, $g_{ok} = -(\alpha_{1k}^0 - \lambda_k \rho_{1k}^0) - \frac{1}{3}(\alpha_{3k}^0 - \lambda_k \rho_{2k}^0) - \frac{1}{5}(\alpha_{5k}^0 - \lambda_k \rho_{3k}^0)$.

Внутренняя задача при $s=1$ имеет ненулевые краевые условия. Отбрасывание этого приближения дает погрешность порядка ε и для ортотропного материала может быть значительной.

В девятом параграфе рассмотрены кинематические краевые условия “жесткого защемления” (заданы $u_\Sigma = v_\Sigma = w_\Sigma = 0$). Для задачи изгиба принимаем $\kappa_a = 0$, $\kappa_p = 1$ и краевые условия определения ОНС имеют вид

$$w_0^0 = 0, \quad \frac{\partial w_0^0}{\partial \xi} = 0, \quad w_0^1 = 0, \quad \frac{\partial w_0^1}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^3 d_{ok} w_2^0. \quad (44)$$

Сравнение краевых условий при изгибе обоих вариантов защемления при $s=0,1$ показывает, что для них внутренняя задача (42) и (44) одна и та же. Уравнения погранслоев для получения функций F_k^s , Φ_k^s сильно отличаются, что при $s \geq 2$ скажется на формировании краевых условий внутренней задачи.

Для симметричной задачи принимаем $\kappa_a = 1$, $\kappa_p = 0$ и краевые условия записываются

$$u_0^0 = 0, \quad v_0^0 = 0, \quad u_0^1 = dw_1^0, \quad v_0^1 = 0. \quad (45)$$

Для обоих вариантов защемления задачи погранслоя плоская деформация при $s=0$ полностью совпадают. Если в задаче изгиба условия (42) и (44) моделируют заделку с одинаковой точностью, то в симметричной задаче сравнение условий (43) и (45) показывают, что они описывают совершенно различные закрепления. Приведенные варианты уточненных краевых условий указывают на различное влияние погранслоев на формирование краевых условий внутренней задачи. Так антиплоская деформация оказывает большее влияние на статические краевые условия, а плоская деформация на геометрические краевые условия (при изгибе в большей мере на углы поворота сечений). Это связано с

учетом эффекта Пуассона в поперечных направлениях. Поэтому указанные поправки становятся важными для пластинок из материалов слабо сопротивляющихся изгибу и растяжению-сжатию в сечениях, перпендикулярных срединной плоскости.

В десятом параграфе рассмотрены вопросы построения теории расчета пластин точностью ε . На основании результатов, полученных во второй главе, предложены некоторые способы уточнения результатов классической теории изгиба и растяжения-сжатия ортотропных пластин. В этом случае обойтись только внутренней задачей не удастся, требуется обязательное рассмотрение задач погранслоев, так как без них не удастся корректно сформулировать краевые условия внутренней задачи. Необходимо отметить, что при построении теории изгиба пластины с точностью ε , за счет уточнения краевых условий участвует перемещение w_2 , хотя учет этого компонента в уравнениях равновесия приводит к повышению точности расчета до ε^2 . Таким образом при асимптотическом анализе уравнений равновесия и краевых условий с некоторой точностью всегда необходимо исследовать искомые функции с избытком при разложении по поперечной координате $z(\zeta)$. С учетом погранслоев с точностью ε , эта модель расчета может быть использована для уточнения НДС у края пластинки, без учета погранслоев - для уточнения результатов классической теории вдали от края пластинки.

В одиннадцатом параграфе проводится анализ уравнений изгиба пластин по модели Тимошенко-Рейсснера и уточнение краевых условий классической теории изгиба пластин.

Исследователи часто обращаются к простейшей сдвиговой модели расчета пластин и оболочек, которая была предложена для балок С.П.Тимошенко и впоследствии распространена на пластины Рейсснером в несколько другой интерпретации. Для пластины эта модель соответствует трем краевым условиям. Для модели Тимошенко-Рейсснера показано, что она учитывает в уравнениях равновесия слагаемые точности ε , но описывает только один погранслой-краевое скручивание. Это подтверждает тот факт, что по этой модели нельзя уточнить кинематические краевые условия, которые связаны со вторым погранслоем - плоской деформацией.

Указан простейший вариант уточнения результатов классической теории изгиба пластин, основанный на полученных первых двух приближениях итерационного процесса внутренней задачи и первых приближениях для антиплоского погранслоя. Это возможно по причинам однородности уравнения изгиба пластин при $s=1$ и введения обобщенного перемещения $w = w_0^0 + \varepsilon w_0^1$. Следовательно, если во всех компонентах ОНС ограничиться лишь первыми двумя членами, то эти уравнения будут удовлетворять классическим уравнениям

изгиба пластин, но будут одновременно содержать члены порядка ε^0 и ε . Если использовать полученные краевые условия для двух приближений, то можно на примере изотропной пластины предложить следующие краевые условия :

1. Статические краевые условия (заданы $\overline{M}_x, \overline{M}_{xy}, \overline{Q}_x$)

$$M_x + \frac{2}{\mu} \varepsilon \frac{\partial M_{xy}}{\partial \eta} = \overline{M}_x + \frac{2}{\mu} \varepsilon \frac{\partial \overline{M}_{xy}}{\partial \eta}, \quad Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial \eta} = \overline{Q}_x + \frac{\partial \overline{M}_{xy}}{\partial \eta}, \quad (46)$$

2. Свободного шарнирного опирания ($w = 0, \overline{M}_x, \overline{M}_{xy}$)

$$w = 0, \quad M_x + \frac{2}{\mu} \varepsilon \frac{\partial M_{xy}}{\partial \eta} = \overline{M}_x + \frac{2}{\mu} \varepsilon \frac{\partial \overline{M}_{xy}}{\partial \eta}, \quad (47)$$

3. Шарнирного закрепления ($w = 0, \overline{M}_x, \overline{v}$)

$$w = 0, \quad M_x = \overline{M}_x + \varepsilon D(1 - \nu) \frac{\partial \overline{v}}{\partial \eta}, \quad (48)$$

4. Свободного защемления ($w = 0, u = 0, \overline{M}_{xy}$)

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{2}{3D(1 - \nu)} \varepsilon^2 \frac{\partial \overline{M}_{xy}}{\partial \eta}, \quad (49)$$

5. Жесткого защемления ($u = 0, \overline{v}, w = 0$)

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\varepsilon^2 \frac{\mu}{3} \frac{\partial \overline{v}}{\partial \eta} \quad (50)$$

В условиях (49), (50) отсутствуют слагаемые с точностью ε , так как рассматриваемая модель расчета не содержит w_2 .

Для статических краевых условий $M_x = \overline{M}_x, M_{xy} = \overline{M} = const, Q_x = \overline{Q}_x$, при которых отсутствует краевая антиплоская деформация ($F=0$), не удастся свести вариант трех краевых условий к двум. Показан итерационный метод выполнения трех краевых условий при использовании классического уравнения изгиба пластин.

Рассмотрен численный пример из статьи В.В.Васильева, решение которого нельзя получить по классической модели расчета. Этот пример показал быструю численную сходимость предложенной методики.

В третьей главе рассмотрена плоская задача теории упругости для многослойных сред из ортотропного материала.

В первом параграфе дается краткий обзор литературы по использованию асимптотических методов исследования при рассмотрении пространственной задачи теории упругости для многослойных конструкций с целью получения прикладных моделей расчета. Выбор той или иной прикладной модели расчета многослойной конструкции зависит от многих факторов. Во-первых, это зависит от того, какое решение больше интересует расчетчика: основное напряженное состояние или погранслои. Второй фактор- степень неоднородности материала по поперечной координате. Третий фактор связан с возможностью адекватного

описания краевого условия. Монография В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова позволила значительно расширить возможности описания краевых условий. Но в ней предложены самые простые модели расчета, которые практически не учитывают погранслои. Поэтому встал вопрос об использовании идеи В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова в асимптотическом анализе многослойных конструкций.

Во втором параграфе дается вариационная постановка плоской задачи теории упругости для многослойных сред. Рассматривается плоская задача теории упругости многослойной конструкции длиной l , состоящей из скрепленных между собой нечетном n ортотропных упругих слоев (толщина каждого слоя $2h_k$, $k=1,2,\dots,n$), нумерация которых ведется от нижнего слоя. Для нечетных слоев перемещения представляем в виде разложения в бесконечный степенной ряд по поперечной координате y_k

$$u^{(k)}(x_k, y_k) = \sum_{i=0}^{\infty} y_k^i u_i^{(k)}(x_k), \quad v^{(k)}(x_k, y_k) = \sum_{i=0}^{\infty} y_k^i v_i^{(k)}(x_k). \quad (51)$$

Для четных слоев с учетом непрерывности функций перемещений имеем

$$u^{(k)}(x_k, y_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_k^i(y_k) u_i^{(k)}(x_k), \quad v^{(k)}(x_k, y_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_k^i(y_k) v_i^{(k)}(x_k). \quad (52)$$

Здесь $\phi_k^0 = 1$, $\phi_k^1 = y_k$, для четных $i \geq 2$ $\phi_k^i = h_k^i - y_k^i$, для нечетных $i \geq 3$ $\phi_k^i = y_k(h_k^{i-1} - y_k^{i-1})$.

На лицевых поверхностях стыковки слоев $\phi_k^i \equiv 0 (i \geq 2)$, а перемещения $u_0^{(k)}, u_1^{(k)}$ четных слоев выражаются через перемещения соседних слоев $2u_0^{(k)} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[h_{k-1}^i u_i^{(k-1)} + (-h_{k+1})^i u_i^{(k+1)} \right]$, $2h_k u_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{\infty} \left[-h_{k-1}^i u_i^{(k-1)} + (-h_{k+1})^i u_i^{(k+1)} \right]$.

Аналогично для $v^{(k)}$.

С использованием известных соотношений определяются деформации и напряжения по слоям, из которых деформации $\gamma_{xy}^{(k)}, \varepsilon_y^{(k)}$, напряжения $\tau_{xy}^{(k)}, \sigma_y^{(k)}$ являются разрывными функциями на лицевых поверхностях стыковки слоев. На примере трехслойной полосы при $i=4$ имеем 26 искомым функций, для определения которых из вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений и соответствующие краевые условия. Система уравнений является полной к искомым функциям, но ее прямое интегрирование связано с известными математическими трудностями.

Для преодоления возникающих трудностей в третьем параграфе использован асимптотический метод исследования. Малый параметр $\varepsilon = H/l$ ($H = \sum_{k=1}^n h_k$) появляется в уравнениях естественным образом при переходе к безразмерным координатам и перемещениям. Для определения ОНС использовано представление

$$\left[u^{(k)}(\varepsilon, \xi), v^{(k)}(\varepsilon, \xi) \right] = \sum_{s=0} \varepsilon^s \left[u^{(k)s}(\xi), v^{(k)s}(\xi) \right]. \quad (53)$$

Однако при таком представлении в уравнениях равновесия малый параметр появляется не только в числителе, что имеет место для однослойных конструкций, но и в знаменателе. Поэтому трудно найти тот начальный параметр разложения, с которого система уравнений распадается на ряд рекуррентных систем уравнений при каждом s . Выход из этого положения находится из условия непрерывности перемещений по нормальной координате – на лицевых поверхностях слоев перемещения должны одинаково описываться в четных и нечетных слоях. Справедливы соотношения перемещений для четных слоев

$$\begin{aligned} 2u_0^{(k)s} &= u_0^{(k-1)s} + u_0^{(k+1)s} + (h_{k-1}u_1^{(k-1)(s-1)} - h_{k+1}u_1^{(k+1)(s-1)}) + \dots \\ 2h_k u_1^{(k)s} &= -u_0^{(k-1)s} + u_0^{(k+1)s} - (h_{k-1}u_1^{(k-1)(s-1)} + h_{k+1}u_1^{(k+1)(s-1)}) + \dots \end{aligned} \quad (54)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для $v_0^{(k)s}, v_1^{(k)s}$.

Для трехслойной полосы при любом s задача сведена к системе дифференциальных уравнений двенадцатого порядка относительно $u_0^{(k)s}, v_0^{(k)s}$ нечетных слоев. Свойства четных слоев учитываются в этих уравнениях дополнительными слагаемыми, учитывающими $E_1^{(2)}, E_2^{(2)}, G_{12}^{(2)}$. Однако эти уравнения имеют сложный вид и могут использоваться только в случае, когда упругие свойства слоев мало отличаются друг от друга. Остальные искомые функции выражаются через известные по простым дифференциальным соотношениям. Выполняются все соотношения теории упругости для многослойных сред.

В четвертом параграфе расширено понятие принципа Сен-Венана для многослойных плоских задач теории упругости, под которым понимается возможность существования затухающих решений даже при не самоуравновешенных торцевых нагрузках для одного слоя. Это объясняется тем, что погранслой может быть получен различными нагрузками, приложенными к слоям $k-1, k, k+1$, (k – нечетное число), но которые в k -ом слое приводят к нулевым силовым факторам. Это видно на примерах трехслойной конструкции при условии $h_1 = h_3$

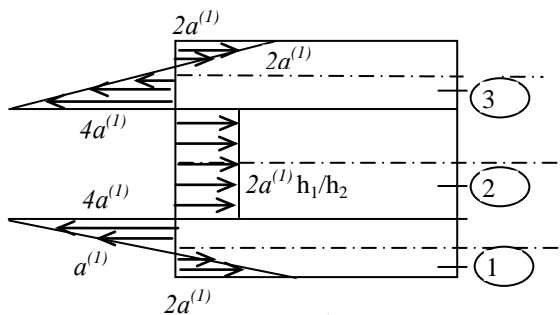


Рис.1

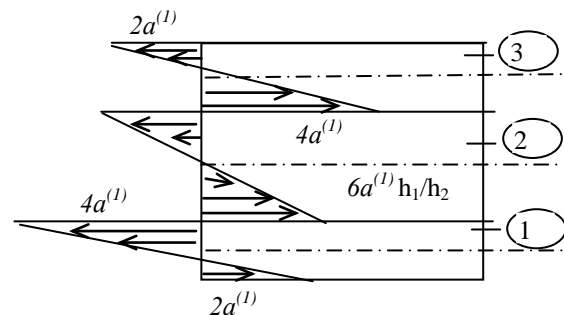


Рис.2

Процедура определения погранслоя в многослойной конструкции отличается от аналогичной задачи однослойных стержней только определителем более высокого порядка.

В пятом параграфе рассмотрен простейший вариант получения краевых условий определения ОНС. Эти условия связаны с выражениями при вариациях $\delta u_0^{(k)}, \delta u_1^{(k)}, \delta v_0^{(k)} (k=1,3)$. При $s=0$ они полностью совпадают с классическими краевыми условиями для слоя.

В шестом параграфе рассмотрена плоская задача теории упругости для трехслойной полосы с мягким средним слоем. В предложенном подходе можно перейти к уравнениям В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова для трехслойной полосы, если положить $E_1^{(2)} = 0$, а $G_{12} \ll E_2^{(2)}$ в уравнениях изгиба. В этом случае имеем систему уравнений двенадцатого порядка

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} A_1 \frac{d^2 u_0^{(1)s}}{dx^2} + \frac{G_{12}^{(2)}}{2h_2} \left[u_0^{(3)s} - u_0^{(1)s} + \frac{d}{dx} \left((h_1 + h_2) v_0^{(1)s} + (h_2 + h_3) v_0^{(3)s} \right) \right] + p_1^{(1)s} &= 0, \\ E_1^{(3)} A_3 \frac{d^2 u_0^{(3)s}}{dx^2} - \frac{G_{12}^{(2)}}{2h_2} \left[u_0^{(3)s} - u_0^{(1)s} + \frac{d}{dx} \left((h_1 + h_2) v_0^{(1)s} + (h_2 + h_3) v_0^{(3)s} \right) \right] + p_1^{(1)s} &= 0, \\ E_1^{(1)} J_1 \frac{d^4 v_0^{(1)s}}{dx^4} - \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{2h_2} \left[v_0^{(3)s} - v_0^{(1)s} + v_{21}^{(2)} h_2 \frac{d}{dx} (u_0^{(1)s} + u_0^{(3)s}) \right] &= q^{(1)s}, \\ E_1^{(3)} J_3 \frac{d^4 v_0^{(3)s}}{dx^4} + \frac{\bar{E}_2^{(2)}}{2h_2} \left[v_0^{(3)s} - v_0^{(1)s} + v_{21}^{(2)} h_2 \frac{d}{dx} (u_0^{(1)s} + u_0^{(3)s}) \right] &= q^{(3)s}. \end{aligned} \quad (55)$$

Система уравнений (55) отличается от уравнений модели В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова тем, что содержит только слагаемые точности ε^0 . Имеющие место в модели В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова слагаемые точности ε^1 при данном подходе содержатся в нагрузочных членах $q^{(1)1}$ и $q^{(3)1}$. Второе отличие заключается в наличии в последних двух уравнениях слагаемых с коэффициентом Пуассона $\nu_{21}^{(2)}$, которые отсутствуют в модели В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова. Влияние этого слагаемого в задачах изгиба незначительно, но в задачах растяжения-сжатия стержня его влияние может стать существенным. Имеются еще два незначительных отличия в толщинах (h_1+h_2) , (h_1+h_3) в первых двух уравнениях и в замене E_z'' на $\bar{E}_2^{(2)} = E_2^{(2)} / (1 - \nu_{12}^{(2)} \nu_{21}^{(2)})$ в последних двух уравнениях.

Если рассматривать изгиб стержня, то тогда слагаемыми с коэффициентом Пуассона $\nu_{21}^{(2)}$ можно пренебречь, и интегрирование системы уравнений (55) сводится к решению двух независимых систем уравнений. Первоначально решается задача изгиба, а затем – задача растяжения-сжатия.

Рассмотрен пример расчета трехслойной плоской задачи теории упругости с мягким средним слоем, имеющий точное решение. Показана быстрая сходимость предложенного метода ($s=0,1,2$).

В седьмом параграфе дается точное решение задачи погранслоя для многослойной пластины. Для плоского и антиплоского погранслоев для каждого слоя имеем представления (30),(31),(24),(25), полученные для однослойной пластины. Показаны точные методы интегрирования по поперечной и продольной координатам задач погранслоев при любом s .

Решение однородной основной системы уравнений плоского погранслоя при $s=0,1$ ищем методом Фурье

$$\begin{pmatrix} p \\ u^{(k)s}, w^{(k)s} \end{pmatrix}(t_k, \eta_k, \zeta_k) = \begin{pmatrix} p \\ u_1^{(k)s}(\zeta_k), u_3^{(k)s}(\zeta_k) \end{pmatrix} \varphi^{(k)s}(\eta^k) e^{-\lambda t_k}. \quad (56)$$

Здесь $\lambda > 0$ показатель изменяемости погранслоя. Решение строится с точностью до некоторой функции $\varphi^{(k)s}$. Для определения функций u_1 и u_3 имеем однородную систему уравнений

$$v_1^{(k)} \frac{\partial^2 u_1^{(k)s}}{\partial \zeta_k^2} + \lambda^2 u_1^{(k)s} - v_2^{(k)} \lambda \frac{\partial u_3^{(k)s}}{\partial \zeta_k} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_3^{(k)s}}{\partial \zeta_k^2} + v_3^{(k)} \lambda^2 u_3^{(k)s} - v_4^{(k)} \lambda \frac{\partial u_1^{(k)s}}{\partial \zeta_k} = 0, \quad (57)$$

решение которой ищем в виде

$$u_1^{(k)s}(\zeta_k) = C_1^{(k)s} e^{\gamma \zeta_k}, \quad u_3^{(k)s}(\zeta_k) = C_2^{(k)s} e^{\gamma \zeta_k}. \quad (58)$$

После подстановки (58) в (57) приходим к однородной алгебраической системе уравнений относительно постоянных $C_1^{(k)s}, C_2^{(k)s}$. Наличие ненулевого решения требует, чтобы определитель этой системы был равен нулю, откуда следует уравнение относительно параметра γ

$$v_1^{(k)} \gamma^4 + \lambda^2 (1 + v_1^{(k)} v_3^{(k)} - v_2^{(k)} v_4^{(k)}) \gamma^2 + v_3^{(k)} \lambda^4 = 0. \quad (59)$$

Записаны три решения для каждого слоя, которые зависят от дискриминанты уравнения $D^{(k)}$ (при $D^{(k)}=0$ задача А, при $D>0$ задача Б, при $D<0$ задача В). В различных вариантах решений имеет место неизвестный параметр λ , который определяется из краевых условий на лицевых поверхностях пластинки

$$\zeta_1 = -\alpha_1 \quad \tau_{xz}^{(1)s} = \sigma_z^{(1)s} = 0, \quad \zeta_n = \alpha_n \quad \tau_{xz}^{(n)s} = \sigma_z^{(n)s} = 0 \quad \text{и условия непрерывности функций} \\ u_1^{(k)s}, u_3^{(k)s}, \tau_{xz}^{(k)s}, \sigma_z^{(k)s} \quad \text{при переходе от слоя к слою.}$$

После решения основной задачи плоского погранслоя при $s=0,1$ переходим к решению вспомогательной задачи, которая заключается в определении $v^{(k)s}$, которое запишем в виде представления Фурье

$$v^{(k)s}(t_k, \eta_k, \zeta_k) = u_2^{(k)s}(\zeta_k) \frac{d\varphi^{(k)s}}{d\eta_k} e^{-\lambda t_k} \quad (60)$$

Функция $u_2^{(k)s}$ определяется из уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 u_2^{(k)s}}{d\zeta_k^2} + \frac{G_{12}^{(k)}}{G_{32}^{(k)}} \lambda^2 u_2^{(k)s} = R_v^{(k)s},$$

решение которого имеет вид

$$u_2^{(k)s} = B_1^{(k)s} \cos \sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{32}^{(k)}}} \lambda \zeta_k + B_2^{(k)s} \sin \sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{32}^{(k)}}} \lambda \zeta_k + u_2^{(k)s*}, \quad (61)$$

где $u_2^{(k)s*}$ - частное решение уравнения при известной правой части.

Постоянные $B_1^{(k)s}, B_2^{(k)s}$ находятся из краевого условия на лицевых поверхностях для $\tau_{yz}^{(k)s}$ и непрерывности функций $u_2^{(k)s}, \tau_{yz}^{(k)s}$. Задача решается с точностью до функции $\varphi^{(k)s}(\eta_k)$. Аналогично решается задача при $s \geq 2$.

Основная задача антиплоского погранслоя сводится к определению перемещения $v^{(k)s}$ при $s=0,1$ из уравнения

$$\frac{\partial^2 v^{(k)s}}{\partial t_k^2} + \frac{G_{12}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}} \frac{\partial^2 v^{(k)s}}{\partial \zeta_k^2} = 0, \quad (62)$$

решение которого ищется в виде

$$v^{(k)s}(t_k, \eta_k, \zeta_k) = u_2^{(k)s}(\zeta_k) F^{(k)s}(\eta_k) e^{-\mu t_k}, \quad (63)$$

где $\mu > 0$ - показатель изменяемости антиплоского погранслоя.

Решение уравнения (62)

$$u_2^{(k)s} = C_1^{(k)s} \cos \sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{32}^{(k)}}} \mu \zeta_k + C_2^{(k)s} \sin \sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{32}^{(k)}}} \mu \zeta_k. \quad (64)$$

Параметр μ находится из условий выполнения краевых условий на лицевых поверхностях и условий непрерывности функций $v^{(k)s}, \tau_{yz}^{(k)s}$ при переходе от слоя к слою. Так, для однослойной пластины имеем выражение

$$\mu^2 \sin \sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}} \mu \cdot \cos \sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}} \mu = 0, \quad (65)$$

которое имеет два нулевых корня и для симметричной задачи по ζ решение представляется в виде $\mu_n = n\pi\sqrt{\frac{G_{23}}{G_{12}}}$ ($n=1,2,\dots$), для кососимметричной задачи -

$$\mu_n = \frac{2n-1}{2}\pi\sqrt{\frac{G_{23}}{G_{12}}} \quad (n=1,2,\dots).$$

Для двухслойной пластины имеем характеристическое уравнение

$$\sqrt{G_{12}^{(2)}G_{23}^{(2)}} \cos 2\sqrt{\frac{G_{12}^{(1)}}{G_{23}^{(1)}}}\mu \cdot \sin 2\sqrt{\frac{G_{12}^{(2)}}{G_{23}^{(2)}}}\mu + \sqrt{G_{12}^{(1)}G_{23}^{(1)}} \sin 2\sqrt{\frac{G_{12}^{(1)}}{G_{23}^{(1)}}}\mu \cdot \cos 2\sqrt{\frac{G_{12}^{(2)}}{G_{23}^{(2)}}}\mu = 0.$$

Получены характеристические уравнения для симметричной и кососимметричной задач трехслойной пластины. Строится алгоритм решения при произвольном числе слоев.

Решение вспомогательной системы уравнений при $s=0,1$ ищем в виде

$$u^{(k)s}(t_k, \eta_k, \zeta_k) = u_1^{(k)s} \frac{dF^{(k)s}}{d\eta_k} e^{-\mu t_k}, \quad w^{(k)s}(t_k, \eta_k, \zeta_k) = u_3^{(k)s}(\zeta_k) \frac{dF^{(k)s}}{d\eta_k} e^{-\mu t_k}$$

и для $u_1^{(k)s}, u_3^{(k)s}$ находится полное решение, которое состоит из решения однородных уравнений и частных решений неоднородных уравнений.

Аналогично решаются основная и вспомогательные задачи при $s \geq 2$.

Получены условия существования затухающих решений.

Основные результаты и выводы по диссертации заключаются в построении вариационно-асимптотического метода расчета однослойных и многослойных полос, пластин и оболочек. Метод позволяет построить неклассические модели расчета конструкций с необходимой точностью. С этой целью в работе получены следующие результаты:

1. Развита вариационная постановка задач теории упругости для однослойных и многослойных стержней и пластин из ортотропного материала с предварительным представлением перемещений в виде бесконечного степенного ряда по поперечной координате.

2. Развита асимптотические методы исследования бесконечной системы дифференциальных уравнений с целью выделения основного напряженного состояния (внутренней задачи) плоской и пространственных задач теории упругости для однослойных и многослойных конструкций.

3. Проведен асимптотический анализ бесконечной системы дифференциальных уравнений у края полосы и пластины с целью выделения задач типа погранслоев. У края пластины получены два погранслоя: краевые плоская и антиплоская деформации.

- Создан вычислительный комплекс по определению собственных чисел и векторов задач погранслоев.

4.Получены условия существования затухающих решений для однослойных и многослойных стержней и пластин, в том числе для кинематических краевых условий.

-Показано, что для антиплоского погранслоя при $s=0,1$ имеет место условие

существования затухающего решения $\int_{-1}^1 \left(\tau_{xz}^s + \zeta \frac{\partial \tau_{xy}^s}{\partial \eta} \right) d\zeta = 0$, которое является

обоснованием сведения трех статических краевых условий к двум.

5.Проведена постановка задачи по точному решению задач погранслоев для многослойной пластины.

6.Разработан метод разделения краевых условий, полученных вариационным путем, для решения задач по определению основного напряженного состояния и погранслоев.

-Показано, что модель Тимошенко-Рейсснера для пластины учитывает только один погранслои-антиплоскую деформацию и не учитывает второй погранслои-плоскую деформацию.

-Показано, что учет погранслоя для балки при кинематических краевых условиях приводит к уточнению напряженно-деформированного состояния при $s=1$, а не $s=2$, что имеет место при остальных краевых условиях.

-Получены краевые условия для классического уравнения изгиба пластин с целью построения модели расчета однослойных пластин с точностью ε как для определения основного напряженного состояния вдали от края, так и для решения у края пластины.

-Асимптотическим методом исследования получены все виды краевых условий пластины до $s=2$ включительно.

-Предложены варианты двумерных прикладных теорий анизотропных пластин, имеющие равные возможности определения напряженно-деформированного состояния как вблизи краев, так и вдали от них.

7.Установлена асимптотика и выведены рекуррентные уравнения для вычисления вектора перемещений и компонентов тензора напряжений для слоистых полос.

-Предложены рекуррентные уравнения определения основного напряженного состояния трехслойного стержня с мягким средним слоем, несколько отличные от уравнений модели В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова.

-Разработан метод интегрирования уравнений изгиба многослойных конструкций по модели В.В.Болотина-Ю.Н.Новичкова.

Основное содержание диссертации с достаточной полнотой изложено в следующих печатных работах:

1. Бутенко Ю.И. Вариационно-асимптотический метод построения теории стержней // Казань: КазИСИ.1986. Деп.в ВИНТИ 6.05.86.№3227-B86.-36с.
2. Бутенко Ю.И. К определению погранслоев в плоской задаче теории упругости // Казань: КазИСИ.1989. Деп.в ВИНТИ 27.02.89.№1525-B89.-34с.
3. Бутенко Ю.И. Определение погранслоев в плоской задаче теории упругости // Сб. Проблемы механики оболочек. Калинин.1988. – С. 19-32.
4. Бутенко Ю.И. К условиям существования затухающих решений плоской задачи теории упругости // Исследования по теории пластин и оболочек. Вып.21.Казань. Изд-во КГУ.1989. – С.15-25.
5. Бутенко Ю.И. К обоснованию внутреннего (основного) напряженного состояния в однослойных и многослойных стержнях из ортотропного материала // Тезисы докладов Международной научно-технической конференции “Механика машиностроения” ММ-95. –Наб.Челны, 1995. – С.99-100.
6. Бутенко Ю.И. Асимптотическое решение плоской задачи теории упругости в вариационной постановке // Актуальные проблемы механики оболочек. Казань. Унипресс.1998. – С.24-29.
7. Бутенко Ю.И. Модифицированный метод асимптотического интегрирования при построении теории стержней из ортотропного материала ч.І // Изв РАН МТТ.2001.№4. –С. 91- 105.
8. Бутенко Ю.И. Модифицированный метод асимптотического интегрирования при построении теории стержней из ортотропного материала ч.ІІ //Изв РАН МТТ.2002.№1. –С.177-188.
9. Бутенко Ю.И. Модифицированный метод асимптотического интегрирования при построении теории стержней из ортотропного материала ч.ІІІ //Изв РАН МТТ. 2002. №2. –С.163-177.
10. Бутенко Ю.И. Модифицированный метод асимптотического интегрирования при построении теории стержней из ортотропного материала ч.ІV // Изв РАН МТТ.2002. №3. – С.192-207.
11. Бутенко Ю.И. Вариационно-асимптотические методы построения неклассических методов расчета стержней и пластин. Казань. Новое Знание. 2001. – 320с.
12. Бутенко Ю.И. Построение внутренней теории расчета пластин с точностью ε // Актуальные проблемы механики оболочек. Труды Междунар. Конференции. Казань. Новое знание. 2000. –С.116-121.

13. Бутенко Ю.И. Вариационно-асимптотический метод построения неклассических моделей расчета стержней и пластин из ортотропного материала // Аннот. Докл. Восьмого Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Пермь. 2001. – С. 31.
14. Бутенко Ю.И. Метод возмущений при интегрировании уравнений изгиба многослойных конструкций // Изв. вузов “Авиационная техника”. 2002. №2. – С. 3-6.
15. Бутенко Ю.И. Метод интегрирования уравнений изгиба многослойной конструкции // Изв. вузов “Математика”. 2003. №10. – С.9-12.
16. Бутенко Ю.И. Построение асимптотически “точной” модели расчета многослойной конструкции // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник.-Вып. 64 - Н.Новгород.-2002. –С.50-55.
17. Бутенко Ю.И. Построение асимптотически “точной” теории расчета многослойной конструкции // Механика композиционных материалов и конструкций. -2003.т.9.-№2. – С.205-230.
18. Бутенко Ю.И. Построение неклассической модели расчета многослойной конструкции заданной точности. // Сб. материалов XV Всероссийской межвузовской научно-технической конференции. Ч.1 –Казань. –2003. – С.326-327.